УДК 512.552.1

МІНОРИ БАГАТОРЯДНИХ КУСКОВИХ ОБЛАСТЕЙ

Ю. В. ЯРЕМЕНКО, Т. М. ЖЕРДІЙ

Описано мінори третього та четвертого порядку багаторядних кускових областей.

The minors of orders 3 and 4 of multiserial piecewise domains are described.

Одним з основних понять теорії кілець та модулів є поняття простого модуля, тобто модуля, у якого ришітка усіх підмодулів є двоелементним ланцюгом. Класично напівпрості кільця характеризуються тим, що усі модулі над ними напівпрості, тобто розкладаються в прямі суми простих модулів. Кільця, над якими всі нерозкладні модулі прості, охарактеризовані класичною теоремою Веддербарна-Артина.

Більш широкий клас модулів – клас ланцюгових модулів розглядали Кете, Асано, Накаяма, Скорняков і ін. Відповідним розширенням класу напівпростих модулів є напівланцюгові модулі, тобто прямі суми ланцюгових модулів.

Узагальнено однорядні артинові кільця, тобто напівланцюгові артинові кільця вперше ввів Накаяма [1]. У цій роботі він довів, що над такими кільцями всі модулі напівланцюгові. Скорняков довів, що й навпаки, якщо будь-який модуль над деяким кільцем є напівланцюговим, то це – артинове напівланцюгове кільце [2].

Поняття артинового бірядного кільця введено Фуллером в роботах [3] у зв’язку з вивченням кілець дистрибутивно модульного типу. Клас артинових бірядний кілець містить узагальнено однорядні кільця Накаями [1], розщепимі групові алгебри скінченного модульного типу та кільця дистрибутивно модульного типу.

У роботі [4] введені бірядні напівдосконалі кільця без будь-яких обмежень скінченності. Структура спадкових, напівспадкових бірядних кілець та кускових бірядних областей вказана в роботах [5,6]. Серед кускових бірядних областей виділені кільця модульно обмеженого типу. Показано, що кускові бірядні області модульно обмеженого типу – це в точності напівдосконалі кускові області дистрибутивно модульного типу.

Важливим узагальненням напівланцюгових та бірядних кілець є багаторядні кільця [7].

При вивченні напівланцюгових, бірядних та багаторядних кілець широко використовується метод сагайдаків.

Вперше поняття сагайдака напівдосконалого кільця було застосовано для характеристики нетерових напівланцюгових кілець. В цьому випадку сагайдаки повністю характеризують такі кільця. Складніші класи напівдосконалих кілець вже не завжди повністю характеризуються будовою сагайдаків, але в багатьох випадках властивості сагайдаків дають важливу інформацію про будову кілець.

Ми будемо використовувати поняття первинного сагайдака напівдосконалого кільця, введене В.В. Кириченко у роботі [8].

У статті розглядаються асоціативні кільця з $1 \neq 0$.

Кільце A називається *напівдосконалим,* якщо факторкільце A/R артинове і ідемпотенти можна піднімати за модулем радикала Джекобсона R [9].

Ідемпотенти можна піднімати за модулем ідеала I, якщо з того, що $q^2-q \in I$ $(q \in A)$, випливає існування ідемпотента $e^2=e \in I$ такого, що $e-q \in I$.

Теорема 1. *Кільце напівдосконале тоді і тільки тоді, коли* $1 \in A$ *розкладається в суму попарно взаємноортогональних локальних ідемпотентів.*

Нерозкладний модуль M називається *n-рядним* [7], якщо він дистрибутивний і містить ланцюгові підмодулі $K_1, \cdots, K_n$ (можливо й рівні нулеві) такі, що $K_1 + \cdots + K_n$ є M, або найбільший власний під модуль в M, а $K_i \cap K_j$ $(i \neq j)$ - нуль або простий модуль.

Напівдосконале кільце A називається *n-рядним*, якщо кожний головний правий і кожний головний лівий A-модуль є n-рядним [7].

Природно, що можна розглядати і n-рядні тільки справа або зліва кільця. Часто, не уточнюючи n, n–рядне кільце будемо називати багаторядним.

Зрозуміло, що при $n=1$ ми отримуємо напівланцюгові кільця, а при $n = 2$ – бірядні кільця.

Теорема 2 [7]. *Якщо кільце A багаторядне справа (зліва), e – ненульовий ідемпотент кільця A, то кільце eAe багаторядне справа (зліва). Зокрема, якщо кільце A багаторядне, то й кільце eAe багаторядне.*

Теорема 3 [7]. *Локальне багаторядне кільце A є ланцюговим.*

Лема 1 [7]. *Фактормодуль n-рядного модуля - n-рядний.*

Лема 2 [7]. *Факторкільце n-рядного справа (зліва) кільця A n-рядне справа (зліва). Зокрема, факторкільце n- рядного кільця n-рядне.*

Ідеал J кільця A називається *первинним*, якщо $J \neq A$ і для будь-яких ідеалів L і N кільця A з включення $LN \subset J$ випливає, що або $L \subset J$, або $N \subset J$.

Первинним радикалом I кільця A називається перетин усіх первинних ідеалів кільця A.

Напівдосконале кільце називається *кусковою областю* якщо будь–який ненульовий гомоморфізм його головних модулів є мономорфізмом.

Нехай $1 = f_1 + ... + f_m$ - розклад одиниці напівдосконалої кускової області A в суму попарно ортогональних ідемпотентів. Тоді, згідно [6] кускова область A має наступний двосторонній пірсовський розклад:

(1) $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & ... & A_{1m} \\ 0 & A_{22} & ... & A_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & A_{mm} \end{pmatrix}$, де A_{ii} $(i = 1,\dots,m)$ - первинні кільця, A_{ij} $(i{\neq}j)$ – лівий A_{ii} -модуль і правий A_{jj}-модуль, причому якщо A_{ij} і A_{jk} одночасно не дорівнюють нулю, то $A_{ik} \neq 0$ $(i,j,k = 1,\dots,m)$.

У цьому випадку первинний радикал I кільця A має вигляд:

(2) $I = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & ... & A_{1m} \\ 0 & 0 & ... & A_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$. Отже, він *нільпотентний.*

Розглянемо факторкільце $\breve{A}={}^{A}/I=\breve{A}_1\times...\times A_m$, де $\breve{A}_i$ $(i=1, \; ... \; ,m)$ нерозкладні кільця. $1=f_1+...+f_m$ – відповідний розклад $1 \in \breve{A}$ у суму попарно ортогональних ідемпотентів.

Позначимо $V={}^{I}/_{I^2}$ і співставимо ідемпотентам $f_1,\dots,f_m$ точки $1, ...,m$ з'єднуючи точку i з точкою j стрілкою тоді і тільки тоді, коли $f_iVf_j{\neq}0.$ Отриманий скінченний орієнтований граф називається *первинним сагайдаком кільця* A і позначається $PQ(A)$ [8]. .

Враховуючи теорему про однозначність розкладу напівдосконалого кільця в прямий добуток нерозкладних кілець, неважко бачити, що сагайдак $PQ(A)$ визначається однозначно, з точністю до перенумерації вершин. Очевидно також, що сагайдак $PQ(A)$ не змінюється при переході до кілець еквівалентних у сенсі Моріти і $PQ(A)=PQ({}^{A}/_{I^2})$.

Теорема 4 [10]. *Нехай багаторядна кускова область* A *з первинним радикалом* I *має двосторонній пірсовський розклад (1). Тоді* $\breve{A}={}^{A}/_{I}$ *розкладається в прямий добуток тіл і первинних напівланцюгових кілець.*

Лема 3 [10]. *Нехай* A *така багаторядна кускова область, що її факторкільце* $\breve{A}$ *по первинному радикалу* I *ізоморфне або тілу* D*, або первинному напівланцюговому кільцю* Δ*, тоді* $A \cong D$*, або* $A \cong \Delta$.

Лема 4 [10]. *Якщо кільце ендоморфізмів головного модуля* P *над багаторядною кусковою областю* A *не є тілом, то* P *- ланцюговий модуль. Це ж має місце і для лівих головних* A *- модулів.*

Скінченний орієнтований граф (сагайдак у термінології Габріеля) називається *ациклічним графом* (сагайдаком), якщо у ньому немає орієнтованих циклів. Точка сагайдака Q називається *витоком (стоком),* якщо в неї не входить (з неї не виходить) стрілка.

Будемо говорити, що точка j первинного сагайдака напівспадкового багаторядного кільця A має вагу D чи вагу Δ, якщо $f_jAf_j \cong D$ чи $f_jAf_j \cong \Delta$.

Теорема 5. *Первинний сагайдак $PQ(A)$ кускової багаторядної області A ($n \geq 2$) має наступні властивості:*

1) *у точку з вагою Δ входить не більше однієї стрілки і виходить з такої точки не більше однієї стрілки;*

2) *$PQ(A)$ ациклічний;*

3) *з кожної точки $PQ(A)$ виходить не більше ніж n стрілок;*

4) *у кожну точку $PQ(A)$ входить не більше ніж n стрілок;*

5) *якщо в точку входить більше однієї стрілки, то ця точка є стоком;*

6) *якщо з точки виходить більше однієї стрілки, то ця точка є витоком.*

Д о в е д е н н я.

1).Нехай у точку g з вагою Δ входять стрілки з точок i і j $(i<j<g)$.

Тоді $A_{ig} \neq 0$, $A_{jg} \neq 0$, причому $A_{ig} \not\subset I^2$, $A_{jg} \not\subset I^2$. Якщо $A_{ij}=0$, то кільце A не буде n-рядним за теоремою 3. Якщо ж $A_{ij} \neq 0$, то $A_{ig}=A_{ij}A_{jg}$. Тобто $A_{ig} \subset I^2$, що знову приводить до протиріччя. Аналогічно з точки з вагою Δ не можуть виходити дві стрілки .

2).Властивість безпосередньо випливає з клітинно - трикутного вигляду (1) кільця А.

3).Нехай із точки 1 виходять стрілки в точки $2, ..., n+1, n+2$. Тоді A_{12}, A_{13}, ..., A_{1n+2} ненульові, причому A_{23}, ... A_{2n+2}, A_{34}, ... A_{3n+2}, .. A_{n+1n+2} дорівнюють нулю (інакше існують A_{1i} $(i=2,...,n+2) \subset I^2$). Ясно, що при цьому головний A–модуль $P_1=f_1A$ є $n+1$–рядним, що суперечить n–рядності кільця А.

4).Доведення таке ж, як і у випадку 3, тільки для лівих головних A - модулів.

5).Розглянемо головний модуль $P_i=e_iA$, де e_i – локальний ідемпотент кільця A. $P_iR=K_1+...+K_n$, де K_t – ланцюговий модуль $(t=1,...,n)$. Тоді елемент $a_{ij} \in e_iRe_j \subset K_t$ породжує ланцюговий модуль

$M=a_{ij}A=(0,...,0, A_{ij}, A_{ij}A_{jj+1}, A_{ij}A_{jj+2}, ..., A_{ij}A_{jn})$, причому серед добутків $A_{ij}A_{jk}$ $(k=j+1,...,n)$ існує не більше одного відмінного від нуля, тому що якщо їх принаймні два, те легко перевірити, що $MR/MR^2=u_1+u_2$, в протиріччя тому, що M – ланцюговий модуль. Припустимо, що в точку g увійшли стрілки з початками в точках i і j, а з неї вийшла стрілка в точку p $(i<j<g<p)$. Тоді A_{ig}, A_{jg}, A_{gp} ненульові, $A_{ij}=0$, тому що в противному $A_{ig}=A_{ij}A_{jg} \subset I^2$, а $A_{ip}=A_{ig}A_{gp} \neq 0$ і $A_{jp}=A_{jg}A_{gp} \neq 0$, що суперечить попередньому. Таким чином, точка g є стоком.

6).Доводиться аналогічно 5.

Нагадаємо, що *мінором n-го порядку кільця A* називається кільце ендоморфізмів B скінченно – породженого проективного A– модуля, який розкладається в пряму суму n – нерозкладних модулів [11].

Перейдемо до опису мінорів другого порядку багаторядних кускових областей. В силу теореми Моріти досить розглянути зведені мінори.

Отже, ми будемо описувати нерозкладні зведені кускові багаторядні області B, одиниця яких розкладається в суму двох локальних ідемпотентів: $1 = e_1 + e_2$. Так як двосторонній пірсовський розклад багаторядних кускових областей має вигляд (1), то кільце B має вигляд:

(3) $B = \begin{pmatrix} B_1 & X \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$, де кільця B_1 і B_2 ізоморфні або тілу D, або первинному напівланцюговому кільцю Δ, *а* X – ланцюговий правий B_2-модуль і ланцюговий лівий B_1-модуль (так як кільце B напівдистрибутивне).

Згідно теореми 5 первинний сагайдак такого кільця має вигляд:

$1 \bullet \longrightarrow \bullet \; 2$

Кільце називається *напівспадковим*, якщо будь-який його скінченнопороджений ідеал проективний.

Теорема 6. *Нерозкладний зведений мінор другого порядку В багаторядної кускової області А є напівланцюговим напівспадковим кільцем.*

Д о в е д е н н я. Нехай $1 = e_1 + e_2$ – розклад $1 \in B$ в суму двох локальних ідемпотентів, $B_i = e_iBe_i$, R_i – радикал Джекобсона кільця B_i, $(i = 1,2)$, R – радикал Джекобсона кільця B, $X = e_1Be_2$. Тоді в силу представлення (3) для R маємо

(4) $R = \begin{pmatrix} R_1 & X \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}$.

Розглянемо головний модуль e_1A. Припустимо, що він бірядний. Тоді за означенням $e_1R = K_1 + K_2$ (K_i –ланцюгові $i = 1, 2$), а $K_1 \cap K_2$ простий або дорівнює нулю. Тоді $R_1 = K_1e_1$ або $R_1 = K_2e_1$. Якщо $R_1=0$, то B_1 – тіло, і так як X- ланцюговий модуль, то і e_1A- ланцюговий. Отже, B – напівланцюгове кільце.

Нехай тепер $R_1 \neq 0$ і $R_1 = K_1e_1$. Тоді, оскільки B кускова область, то $R_1 X \neq 0$. Якщо $R_1X=X$, то $e_1R=K_1$, так як (R_1, R_1X) лежить в K_1, а значить і e_1A-ланцюговий правий модуль. Якщо ж $R_1X \neq X$, то R_1X – простий правий модуль, отже $R_1XR_2 = 0$ і $R_2 = 0$ так як B кускова область. Таким чином B-напівланцюгове кільце.

Нехай j скінченнопороджений ідеал, який лежить в e_iA $(i = 1, 2)$. Так як j-ланцюговий модуль, то він є фактор-модулем головного модуля, а так як A кускова область, маємо, що j ізоморфний головному модулю. Ясно, що він проективний і B- напівспадкове справа кільце. Якщо ж j лежить в $e_1A \oplus e_2A$, то розглянемо ідеал $j + e_1A$. Тоді $j + e_1A = j' \oplus e_1A$, де j' проекція j на e_2A. Так як j' скінченнопороджений ідеал, який лежить в головному модулі, то він проективний. За теоремою про ізоморфізми $j + e_1A/j \cong e_1A/e_1A \cap j$, а за лемою Шануеля $j \oplus e_1A \cong (j + e_1A) \oplus e_1A \cap j$, де обидва прямі доданки проективні. Отже, j-проективний модуль. Аналогічно доводиться, що A-

напівспадкове справа.

Теорема 7. *Багаторядна кускова область A, у двосторонньому пірсовському розкладі (1) якої всі $A_{ij} \neq 0$ при i менших j, є напівланцюговим напівспадковим кільцем.*

Д о в е д е н н я. Припустимо, що головний A-модуль P не ланцюговий. Але тоді приходимо до протиріччя з тим, що A- кускова область, чи до протиріччя з теоремою 6. Напівспадковість кільця A доводиться аналогічно як у теоремі 6.

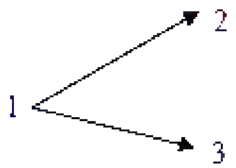
Розглянемо мінори 3-го порядку багаторядних кускових областей.

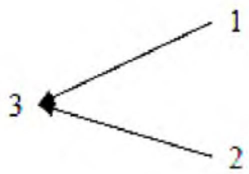
З вищесказаного випливає, що потрібно описати нерозкладні зведені кускові багаторядні області B, одиниця яких розкладається в суму трьох локальних ідемпотентів: $1 = e_1 + e_2 + e_3$. Такі кільця мають вигляд:

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_{12} & B_{13} \\ 0 & B_2 & B_{23} \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix},$$ де кільця B_1, B_2 і B_3 ізоморфні або тілу D, або первинному напівланцюговому кільцю, B_{ij} – ланцюгові бімодулі.

Якщо всі бімодулі B_{ij} відмінні від нуля то, згідно теореми 4, маємо напівланцюгове напівспадкове кільце з первинним сагайдаком :

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$$

Згідно теореми 5 для мінорів 3-го порядку отримаємо ще такі первинні сагайдаки: 

і 

,

яким відповідають мінори:

(5) $$B = \begin{pmatrix} D_1 & B_{12} & B_{13} \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}$$ і (6) $$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & B_{13} \\ 0 & B_2 & B_{23} \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix}.$$

Теорема 8. *Мінори 3-го порядку багаторядної кускової області вигляду (5) і (6) ізоморфні кільцям :* $$\begin{pmatrix} D & D & D \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}$$ *і* $$\begin{pmatrix} B_1 & 0 & D \\ 0 & B_2 & D \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix},$$ *де D тіло, а B_i ($i = 1,2,3$) або співпадають з тілом D, або є первинними напівланцюговими кільцями.*

Д о в е д е н н я. Розглянемо для прикладу кільце (6). Нехай x_0 і y_0 ненульові елементи, які належать відповідно бімодулям B_{13} і B_{23}. Задамо відображення $\varphi: B_1 \longrightarrow D_3$, і відображення $\psi: B_2 \longrightarrow D_3$ за правилами $ax_0 = x_0 a^{\varphi}$, $by_0 = y_0 b^{\psi}$. Ясно, що φ і ψ - мономорфізми.

Поклавши $D = D_3$, $B_1 = Im\ \varphi$, $B_2 = Im\ \psi$, побудуємо кільце $A=\begin{pmatrix} B_1 & 0 & D \\ 0 & B_2 & D \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}$

і задамо відображення f кільця A в кільце *(6)*, поклавши

$$\begin{pmatrix} a & 0 & x \\ 0 & b & y \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} a^{\varphi^{-1}} & 0 & x_0 x \\ 0 & b^{\psi^{-1}} & y_0 y \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

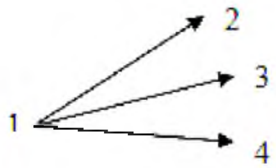
Множення і додавання введемо як звичайні множення і додавання матриць. Неважко перевірити, що таке відображення буде ізоморфізмом.

Наслідок 2.3.1. *Мінор 3-го порядку багаторядної кускової області є або напівланцюговим напівспадковим кільцем, або ізоморфний одному із кілець :* $\begin{pmatrix} D & D & D \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} B_1 & 0 & D \\ 0 & B_2 & D \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}$, *де D тіло, а кільця B_i ($i = 1,2,3$) або співпадають з тілом D, або є первинними напівланцюговими кільцями.*

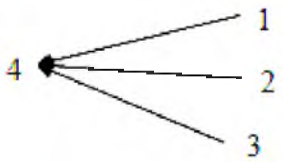
Опишемо мінори 4-го порядку багаторядних кускових областей. Міркуючи аналогічно до попереднього отримаємо 11 (з точністю до пере нумерації вершин) первинних сагайдаків побудованих на 4-х вершинах, а відповідно і 11 кілець які їм відповідають:

1). 

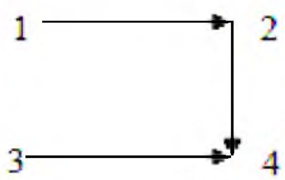
$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_2 & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_3 & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_4 \end{pmatrix}$,

2). 

$A = \begin{pmatrix} D & D & D & D \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_4 \end{pmatrix}$,

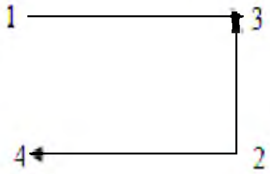
3). 

$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & D \\ 0 & A_2 & 0 & D \\ 0 & 0 & A_3 & D \\ 0 & 0 & 0 & D \end{pmatrix}$,

4). 

$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} & 0 & D \\ 0 & A_2 & 0 & D \\ 0 & 0 & A_3 & D \\ 0 & 0 & 0 & D \end{pmatrix}$, 5). 

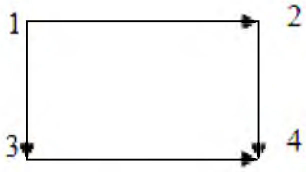
$$A=\begin{pmatrix} D & D & D & D \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_4 \end{pmatrix},$$

6). 

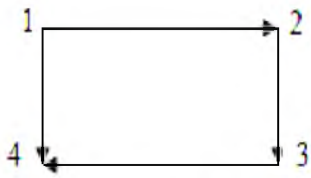
$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & D & 0 \\ 0 & D & D & D \\ 0 & 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_4 \end{pmatrix}.$$

7). 

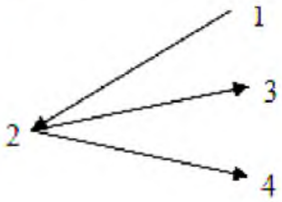
$$A=\begin{pmatrix} D & 0 & D & D \\ 0 & D & D & D \\ 0 & 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D \end{pmatrix},$$

8). 

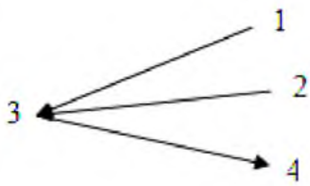
$$A=\begin{pmatrix} D & D & D & D \\ 0 & A_2 & 0 & D \\ 0 & 0 & A_3 & D \\ 0 & 0 & 0 & D \end{pmatrix},$$

9). 

$$A=\begin{pmatrix} D & D & 0 & D \\ 0 & A_2 & D & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & D \\ 0 & 0 & 0 & D \end{pmatrix},$$

10). 

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & D & D & D \\ 0 & D & D & D \\ 0 & 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_4 \end{pmatrix},$$

11) 

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & D & 0 \\ 0 & A_2 & D & 0 \\ 0 & 0 & D & D \\ 0 & 0 & 0 & A_4 \end{pmatrix},$$

де D тіло, а A_i ($i = 1,2,3,4$) або співпадають з тілом D, або є первинними напівланцюговими кільцями. A_{ij} ($i \neq j$)– ланцюговий лівий модуль над кільцем A_i і ланцюговий правий модуль над кільцем A_j.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Nakayama T. On Frobeniusen algebras II // Ann. of Math. – 1941. – V. 42, № 1. – P. 1-22.
2. Скорняков Л.А. Когда все модули полуцепные? // Мат. заметки. – 1969. – Т. 5, № 2. – С. 173-182.

3. Fuller K.R. Weakly symmetric rings of distributive module type // Comm. in Algebra. – 1977. – № 5. – P. 997-1008.

4. Кириченко В.В., Костюкевич П.П. Бирядные кольца // Укр. мат. журнал. – 1986. – Т.38, № 6. – С. 718-723.

5. Кириченко В.В., Костюкевич П.П., Яременко Ю.В. Бирядные кольца и модули над ними // Алгебраические структуры и их применение. – К.: УМК ВО, 1988. – С. 43-74.

6. Кириченко В.В., Самир Валио, Яременко Ю.В. Полусовершенные кольца и их колчаны // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – К.: Ин-т математики АН Украины, 1993. – С. 438-456.

7. Кириченко В.В., Яременко Ю.В. Многорядные кольца // Укр. мат. журнал. – 1996. – Т. 48, № 9. – С. 1223-1235.

8. Кириченко В.В. О полуцепных наследственных и полунаследственных кольцах // Зап. науч. семинара ЛОМИ АН СССР. – 1982. – Т. 144. – С. 137-147.

9. Bass H. Finitistic dimension and homological generalization of semiprimary rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1960. – V. 95. – P. 466-488.

10. Яременко Ю.В. Багаторядні кускові області // Вісник Київського університету. Фізико-математичні науки. – 2002. - №4. – С. 50-55.

11. Drozd Yu. A. Minors and reduction theorems // Coll Math. Soc. J. Bolyai. – 1971. – V. 6. – P. 173-176.